प्रश्न-पत्र की योजना
कक्षा : 12
विषय: गणित

अवधि : 3 घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 80**

1. उद्देश्य हेतु अंकभार -

क्र.सं.	उद्देश्य	अंकभार	प्रतिशत %
1.	ज्ञान	26	32.50
2.	अवबोध	29	36.25
3.	अभिव्यक्ति	23	28.75
4.	मौलिकता	02	2.50
	योग	**80**	**100**

2. प्रश्नों के प्रकारवार अंकभार -

क्र.स	प्रश्नों का प्रकार	प्रश्नों की संख्या	अंक प्रति प्रश्न	कुल अंक प्रतिशत	प्रतिशत प्रश्नों का	संभावित समय
1.	वस्तुनिष्ठ	12 + 6 = 8	1	22.50	36.00	45
2.	अतिलघुत्तरात्मक	12	1	15.00	24.00	35
3.	लघुत्तरात्मक	13	2	32.50	26.00	45
4.	दीर्घउत्तरीय प्रश्न	4	3	15.00	8.00	35
5.	निबंधात्मक	3	4	15.00	6.00	35
	योग	**50**		**100**	**100**	**195**

3. विषय वस्तु का अंकभार –

क्र.सं.	विषय वस्तु	अंकभार	प्रतिशत
1.	सम्बन्ध एवं फलन	3	3.75
2.	प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन	4	5.00
3.	आव्यूह	5	6.25
4.	सारणिक	5	6.25
5.	सांतत्यता एवं अवकलनीयता	8	10.00
6.	अवकलजों के अनुप्रयोग	6	7.50
7.	समाकलन	12	15.00
8.	समाकलनों के अनुप्रयोग	4	5.00
9.	अवकल समीकरण	6	7.5
10.	सदिश बीजगणित	7	8.75
11.	त्रिविमीय ज्यामिति	9	11.25
12.	रैखिक प्रोग्रामन	4	5.00
13.	प्रायिकता	7	8.75
		80	**100**

प्रश्न - पत्र ब्ल्यू प्रिन्ट
विषय : गणित

कक्षा-12 **पूर्णांक: 80**

क्र. सं.	उद्देश्य इकाई/उप इकाई	ज्ञान					अवबोध					ज्ञानोपयोग/अभिव्यक्ति					कौशल/मौलिकता					योग
		वस्तुनिष्ठ	अति. लघु	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	अति. लघु	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	अति. लघु	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	अति. लघु	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	
1.	सम्बन्ध एवं फलन			2(1)			1(1)															3(2)
2.	प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन				3(1)$^{\#}$			1(1)														4(2)
3.	आव्यूह	1(-)							2(1)			1(–)$^{+}$	1(–)									5(1)
4.	सारणिक		1(-)	2(1)					2(1)													5(2)
5.	सांतत्यता एवं अवकलनीयता	1(1)$^{+}$						1(–)		3(1)$^{\#}$				2(1)			1(–)					8(3)
6.	अवकलजों के अनुप्रयोग						1(–)$^{+}$	1(–)	2(1)					2(1)								6(2)
7.	समाकलन	1(-)		2(1)		4(1)$^{\#}$	1(–)					1(–)$^{+}$			3(1)$^{\#}$							12(3)
8.	समाकलनों के अनुप्रयोग							1(–)				1(–)		2(1)								4(1)
9.	अवकल समीकरण								2(1)		4(1)$^{\#}$											6(2)
10.	सदिश बीजगणित				3(1)$^{\#}$		1(–)						2(–)				1(–)					7(1)
11.	त्रिविमीय ज्यामिति	1(-)$^{+}$	1(-)	2(1)				1(–)	2(1)			1(–)	1(–)									9(2)
12.	रैखिक प्रोग्रामन															4(1)$^{\#}$						4(1)
13.	प्रायिकता	1(-), 1(1)$^{+}$					1(–)		2(1)			1(–)	1(–)									7(1)
		6(1)	2(–)	8(4)	6(2)	4(1)	5(1)	5(1)	12(6)	3(1)	4(1)	5(–)	5(–)	6(3)	3(1)	4(1)	2(–)					
		26(8)					**29(10)**					**23(5)**					**2(–)**					**80(23)**

विकल्पों की योजना –

(–) बहुविकल्पीय प्रश्न, (–)$^{+}$ रिक्त स्थान तथा ( )$^{\#}$ आन्तरिक विकल्प वाले प्रश्न हैं। प्रश्न संख्या 17 से 23 में एकान्तिक आंतरिक विकल्प है।

नोट :- कोष्ठक में बाहर की संख्या अंकों की तभी भीतर प्रश्नों की द्योतक है।

हस्ताक्षर

नमूना प्रश्न-पत्र 2022-23

(RBSE बोर्ड द्वारा जारी)

गणित (15)

कक्षा - XII

समय : 3 घंटे 15 मिनट **पूर्णांक : 80**

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
2. सभी प्रश्न करने अनिवार्य है।
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर पुस्तिका में ही लिखें।
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड है उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।

खंड - अ

1. बहुविकलपीय प्रश्न (12×1 = 12)

(i) समुच्चय N में सम्बन्ध R निम्नवत परिभाषित है- R={(a,b):a=b-2,b>6} तब निम्नलिखित में से कौन सही है? [1]

(अ) $(2,4)\in R$ (ब) $(3,8)\in R$
(स) $(6,8)\in R$ (द) $(8,7)\in R$

(ii) यदि आव्यूह A और B के क्रम क्रमश: m×n तथा n×p हैं तो का क्रम है- [1]

(अ) p×m (ब) n×m
(स) n×p (द) m×n

(iii) निम्न फलनों में असतत् फलन है- [1]

(अ) sin x (ब) x^2
(स) $\frac{1}{1-2x}$ (द) $\frac{1}{1-x^2}$

(iv) $\int \sin 3x\, dx$ का मान होगा- [1]

(अ) $\frac{1}{3}\cos 3x + c$ (ब) $\frac{1}{3}\sin 3x + c$
(स) $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$ (द) $-\cos 3x + c$

(v) $\int x \sin x\, dx$ का मान होगा- [1]

(अ) x sin x + cosx +c (ब) -x cos x + sinx +c
(स) x sin x -6 cosx +c (द) x cos x + sinx +c

(vi) वक्र $y^2 = 4x$,y अक्ष तथा रेखा y = 3 से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है [1]

(अ) 2 (ब) $\frac{9}{4}$
(स) $\frac{9}{3}$ (द) $\frac{9}{2}$

(vii) व्यंजन $\hat{i}.\hat{i} - \hat{j}.\hat{j} + \hat{k}.\hat{k}$ का मान है- [1]

(अ) 0 (ब) 1
(स) 2 (द) 3

(viii) सदिशों $\vec{a}\times\vec{b}$ तथा $\vec{b}\times\vec{a}$ के बीच का कोण है- [1]

(अ) 0° (ब) 90°
(स) 135° (द) 180°

(ix) बिन्दु की (α,β,γ) की y अक्ष से दूरी है- [1]

(अ) α (ब) β
(स) γ (द) $\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}$

(x) यदि $P(A)=\left(\frac{3}{10}\right), P(B)=\frac{2}{3}$, तथा $P(A\cup B)=\frac{3}{5}$ तो $P\left(\frac{B}{A}\right)+P\left(\frac{A}{B}\right)$ बराबर है- [1]

(अ) $\frac{1}{4}$ (ब) $\frac{1}{3}$
(स) $\frac{5}{12}$ (द) $\frac{7}{12}$

(xi) A व B दो घटनाएँ हैं कि P(A/B)=P(B/A) ≠0, तब निम्न में से घटनाओं के बारे में सही चयन कीजिए। [1]

(अ) $A\subset B$ (ब) A =B
(स) $A\cap B=\phi$ (द) P(A)=P(B)

(xii) यदि P(E)=0.35 और $P(E\cup F)=0.6$ है तथा E व F स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तब P(F) का मान है- [1]

(अ) $\frac{5}{13}$ (ब) $\frac{7}{13}$
(स) $\frac{9}{13}$ (द) $\frac{11}{13}$

2. रिक्त स्थान की पूर्ति करो- (प्रत्येक 1 अंक)

(i) आव्यूह $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ का योज्य प्रतिलोम .... है। [1]

(ii) x = 4 पर का $\sqrt{x^{-3}}$ अवकलज .... है। [1]

(iii) एक वृत्त की त्रिज्या में 0.7 सेमी/सेकण्ड की दर से वृद्धि हो रही है, तब वृत्त की परिधि में परिवर्तन की दर ....होगी। [1]

(iv) $\int(3x^2+4x^3)dx$ का मान..................होगा। [1]

(v) यदि एक रेखा की दिक् कोज्याएँ हैं k, k, k तो k = ...होगा। [1]

(vi) यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{12}$ व $P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{1}{5}$ है, तब $P(A\cup B)$ .... होगा [1]

3. अति लघुउत्तरीय प्रश्न (प्रत्येक 1 अंक)

(i) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। [1]

(ii) यदि $x+y=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ तथा $2x-y=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए। [1]

(iii) यदि बिन्दु A(m,-1), B(2,-1) तथा C(4,5) सरेखीय हों, तो m का मान ज्ञात कीजिए। [1]

(iv) यदि फलन $F(x)=\frac{\sin(10x)}{x}, x\neq 0, x=0$ पर सतत् हैं, तो F(0) का मान ज्ञात कीजिए। [1]

(v) दिखाइए कि फलन $f(x) = 7x^2 - 3, x > 0$ पर एक वर्धमान फलन है। [1]

(vi) वृत $x^2+y^2=1$ के एक चतुर्थांश का क्षेत्रफल् ज्ञात कीजिए। [1]

(vii) सदिशों AB, BC, CD तथा DA योगफल ज्ञात कीजिए, जहाँ ABCD एक चतुर्भुज है। [1]

(viii) सदिश $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=-2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$, और $\vec{c}=\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k}$ का योगफल ज्ञात कीजिए। [1]

(ix) उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए जिनके दिक् अनुपात 4,-3, 5 तथा 3,4,5 हैं।? [1]

(x) बिन्दुओं P(1-3,4) तथा Q(-4,1,2) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। [1]

(xi) x,y और z की दिक् - कोज्याएँ ज्ञात कीजिए। [1]

(xii) यदि दो घटनाएँ A और B ऐसी हैं कि $P(A)=\frac{1}{4}$ और $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$ तो $P(A'\cap B')$ ज्ञात कीजिए। [1]

खंड - ब

लघुउत्तरीय प्रश्न (प्रत्येक 2 अंक)

4. यदि A ={1,2} तथा B ={3,4} है, तो A और B में सम्बन्धों की संख्या ज्ञात कीजिए। [2]

5. $\begin{bmatrix}x+y & 2\\ 5+z & xy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 5 & 8\end{bmatrix}$ में x, y, z का मान ज्ञात कीजिए। [2]

6. सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix}a & c & a+c\\ a+b & b & a\\ b & b+c & c\end{vmatrix}=4abc$ [2]

7. आव्यूह $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ का सहखण्डज आव्यूह ज्ञात कीजिए। [2]

8. दिखाइए कि फलन $F(x)=\frac{1}{(x-a)}$ बिन्दु x = a पर असतत् है। [2]

9. ज्ञात कीजिए कि किस अन्तराल में $y = x^2e^{-x}$ वर्धमान है? [2]

10. $\sin\theta + \cos\theta$ का महत्तम मान ज्ञात कीजिए। [2]

11. $\int\frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$. का मान ज्ञात कीजिए। [2]

12. दो परवलयों $y = x^2$ तथा $x = y^2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [2]

13. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{x(2\cos x+1)}{\sin y+y\cos y}$ को हल कीजिए। [2]

14. सदिश $\hat{i}+\hat{j}+2k$ अनुदिश इकाई के सदिश ज्ञात कीजिए। [2]

15. दर्शाइए कि बिन्दु $2\hat{i}, -\hat{i}-4\hat{j}, -\hat{i}+4\hat{j}$ एक समद्विबाहु त्रिभुज बनाते हैं। [2]

16. सिद्ध कीजिए कि यदि A व B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं, A' तो तथा B' भी स्वतन्त्र होगों। [2]

खंड - स

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (प्रत्येक 3 अंक)

17. $\tan^{-1}(1)+\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ को हल कीजिए। [3]

अथवा

सिद्ध कीजिए - $\tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

18. यदि फलन $F(x)=\begin{cases}kx+1, \leq \pi\\ \cos x, x>\pi\end{cases}$ $x=\pi$ पर सतत् है तो k का मान ज्ञात कीजिए। [3]

अथवा

यदि $y\sqrt{\frac{(x-1)(x-1)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

19. समाकल $\int\frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$ का मान ज्ञात कीजिए। [3]

अथवा

सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{x/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x+\sqrt{\cos x}}}dx=\frac{\pi}{4}$ [3]

20. सदिश $5\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 8 इकाई है। [3]

अथवा

D,E तथा F, ΔABC की भुआओं के मध्यबिन्दु हैं। यदि O कोई बिन्दु है, तो सिद्ध कीजिए कि
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$ [3]

खंड - द

निबन्धात्मक प्रश्न **(प्रत्येक 4 अंक)**

21. $\int \frac{x^2}{x^6+x^3}dx$ **का समाकलन कीजिए।** **[4]**

अथवा

सिद्ध कीजिए $\int_a^b (a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx$ **और इसका प्रयोग करके** $\int_4^9 \frac{f(x)}{f(x)+f(13-x)}dx$ **ज्ञात कीजिए।**

22. अवकल समीकरण (x + y)dy + (x – y)dx = 0 को हल कीजिए। दिया है : y = 1 जब x = 1, **[4]**

अथवा

अवकल समीकरण dy/dx + y tan = y^2 sec x को हल कीजिए।

23 निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत Z = 3x + 2y का आलेखीय विधि से अधिकतमीकरण कीजिए -

5x + 2y ≤ 10, 3x + 5y ≤ 15; x ≥ 0, y ≥ 0 **[4]**

अथवा

निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत Z = x + 2y का रैखिक प्रोग्रामन के ग्राफीय विधि द्वारा न्यूनतमीकरण कीजिए-

2x + y ≥ 3, x + 2y ≥ 6; x, y ≥ 0

***

नमूना प्रश्न पत्र उत्तरमाला

खंड - अ

1. बहुविकलपीय प्रश्न

(i) [स] (6, 8) ∈ R

R = {(a, b) : a = b – 2, b > 6 }

∴ = {(5, 7), (6, 8), (7, 9), ...}

यहाँ पर (6, 8) ∈ R है

(ii) [द] m×p

यदि आव्यूह A एक m×n कोटि का आव्यूह है और B क n × p कोटि का आव्यूह है तब A तथा B का गुणनफल AB एक m×p कोटि का आव्यूह होगा।

(iii) [स] $\frac{1}{1-2x}$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

(i) $\sin x$

$x \in R \quad \sin \in [-1,1]$

$(ii) x^2$

$x \in R \quad x^2 \in [-0,\infty]$

$(iii) \frac{1}{1-2x}$

$1-2x=0$

$x=\frac{1}{2}$ पर परिभाषित नहीं है।

$(iv) x^2 \in [0,\infty]$

$x^2+1 \in [1,\infty]$

$x^2+1 \neq 0$

अत: हमेशा परिभाषित है।

(iv) [स $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$

$$\int \sin 3x dx = \frac{-\cos 3x + c}{3} + c = \frac{-1}{3}\cos 3x + c$$

(v) [ब] - x cos x + sin x +c

$\int x \sin x dx = x\int \sin x dx - \int\left[\frac{dx}{dx}\times\int \sin x dx\right]dx$

$= x(-\cos x) - \int 1x - (\cos x)dx$

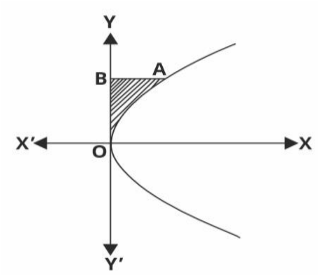
$= -x\cos + \int \cos x dx$

$= -x\cos x + \sin x + c$

(vi) [ब] $\frac{9}{4}$ वर्ग इकाई

अभीष्ट क्षेत्रफल = $\int_0^3 x dy$

$\int_0^3 \frac{1}{4}y^2 dy$



$$=\frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3$$

$$=\frac{1}{4\times3}\left[(3)^3\right]=\frac{27}{12}$$

$= \frac{9}{4}$ वर्ग इकाई

(vii) [ब] 1

दिया गया है

$$=\hat{i}.\hat{i}-\hat{j}.\hat{j}+\hat{k}.\hat{k} \quad \left(\hat{i}.\hat{i}=\hat{j}.\hat{j}=\hat{k}\hat{k}=1\right)$$

$$=1-1+1=1$$

(viii)[द] $180°$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$$

दोनो के मध्य कोण $=180°$

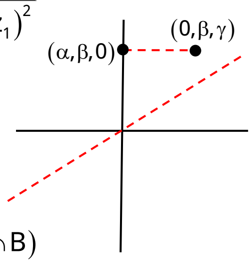
(ix) [द] $\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}$

दो बिन्दु के बीच की दूरी =

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$=\sqrt{(\alpha-0)^2+(\beta-\beta)^2+(\gamma-0)^2}$$

$$=\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}$$



(x) [द] $\frac{7}{12}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B)=\frac{3}{10}+\frac{2}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$$

$$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{4}$$

$$P\left(\frac{A}{B}\right)+P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$$

(xi) [द] $P(A)=P(B)$

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=P\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$P\left(\frac{A\cap B}{P(B)}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$P(A)=P(B)$$

(xii) [अ]

$$P(A)=0.35$$

$$P(A\cup B)=0.6$$

A तथा B स्वतंत्र घटना है।

$P(A).P(B) = P(A\cap B)$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$0.6=0.35+P(B)-0.35\times P(B)$$

$$0.6-0.35=P(B)(1-0.35)$$

$$0.25=P(B)(0.65)$$

$$P(B)=\frac{0.25}{0.65}$$

$$P(B)=\frac{25}{65}=\frac{5}{13}$$

2. रिक्त स्थान की पूर्ति करो-

(i) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 4\\ -3 & -1\end{bmatrix}$

(ii) $-\frac{3}{64}$

(iii) 4.4 सेमी./से.

(iv) $x^3 + x^4 + c$

(v) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

(vi) $\frac{13}{24}$

3. अति लघुउत्तरीय प्रश्न (प्रत्येक 1 अंक)

(i) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$

(ii) दिए गए दोनों समीकरण को जोड़ने पर,

$$x+y+2x-y=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3x=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

(iii) तीन बिन्दु संरेख होंगे यदि -

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_1 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}m & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & 5 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow m(1-5)-(-1)(2-4)+(1)(10-4)=0$$

$$\Rightarrow -4m-2+6=0$$

$$\Rightarrow -4m+4=0$$

$$\Rightarrow 4m=4$$

$$\Rightarrow m=1$$

(iv) यदि फलन $F(x)=\frac{\sin(10x)}{x}$, $x\neq0$ पर सतत् है तब

$$F(0)=\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(10x)}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(10x)}{10x}\times 10\right]$$
$$=10\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin(10x)}{(10x)}\right]$$
$$=10\times 1=10$$

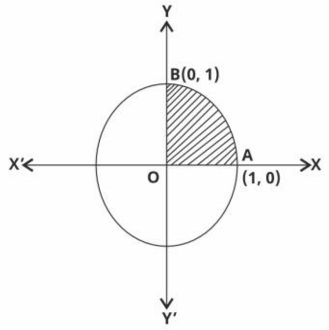
(v) $f(x) = 7x^2 - 3,\ x > 0$

तब $f(x) = 14x - 0 > 0\ \ \forall\ x > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0\ \forall x > 0$

अत: फलन $f(x)$ वर्धमान फलन है क्योंकि $f'(x) > 0$.

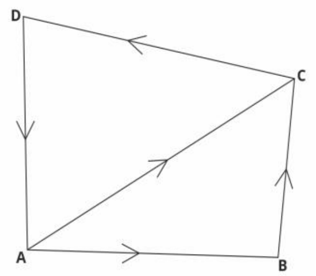
(vi) प्रश्नानुसार अभीष्ट क्षेत्रफल = OABO



$$=\int_0^1 y\,dx$$
$$=\int_0^1\sqrt{1-x^2}$$
$$=\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{(1)^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{1}\right)\right]_0^1$$
$$=\left\{0+\frac{1}{2}\sin^{-1}(1)\right\}-\left\{0+\frac{1}{2}\sin^{-1}(0)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}\ \text{वर्ग इकाई}$$

(vii) यहाँ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$

$$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})$$
$$=(\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{CA})$$
$$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CA}$$
$$=\vec{0}$$



(viii) यहाँ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})+(-2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k})+(\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k})$

$$=(1-2+1)\hat{i}+(-2+4+6)\hat{j}+(1+5+7)\hat{k}$$
$$=0\hat{i}+8\hat{j}+13\hat{k}$$

(ix) यदि दोनों रेखाओं के बीच अभीष्ट कोण θ है तो

$$\cos\theta=\left|\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right|$$
$$=\left|\frac{(4)(3)+(-3)(4)+(5)(5)}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2+(5)^2}\sqrt{(3)^3+(4)^2+(5)^2}}\right|$$
$$=\left|\frac{12-12+25}{\sqrt{16+9+25)}\sqrt{9+16+25}}\right|$$
$$=\left|\frac{25}{50}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore\ \theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

(x) $PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2+z_1)^2}$

$$=\sqrt{(-4-1)^2+(1-(-3))^2+(2-4)^2}$$
$$=\sqrt{25+16+4}$$
$$=\sqrt{45}\ \text{इकाई}$$

(xi) x-अक्ष की दिक्-कोज्याएँ = 1, 0, 0

y-अक्ष की दिक्-कोज्याएँ = 0, 1, 0

z-अक्ष की दिक्-कोज्याएँ = 0, 0, 1

(xii) $P(A)=\frac{1}{4}\Rightarrow P(A')=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$P(B)=\frac{1}{2}\Rightarrow P(B')=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

यहाँ $P(A)\,.\,P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=P(A\cap B)$ (दिया है)

$\therefore$ A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

$\therefore$ A' तथा B' भी स्वतंत्र घटनाएँ होंगी।

तब, $P(A'\cap B')=P(A').P(B')$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

खंड - ब

लघुउत्तरीय प्रश्न

4. यहाँ O(A) = 2, O(B) = 2

तब O(A × B) = O(A) . O(B) = 2 × 2 = 4

तब A से B में परिभाषित सम्बन्धों की संख्या = A × B के कुल उपसमुच्चयों की संख्या = 2^4 = 16

5. तुलना करने पर,

$x + y = 6$ ...(1)

$5 + z = 5$ ...(2)

$xy = 8$ ...(3)

समीकरण (1) व (3) से

$x(6 - x) = 8$

$\Rightarrow 6x - x^2 = 8$

$\Rightarrow x^2 - 6x = 8$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 2x + 8 = 0$

$\Rightarrow x(x - 4) - 2(x - 4) = 0$
$\Rightarrow (x - 4)(x - 2) = 0$
$\Rightarrow x = 4, 2$
जब $x = 4, y = 6 - x = 6 - 4 = 2$
जब $x = 2, y = 6 - 2 = 4$
समीकरण (2) से $z = 0$

6. $LHS = \begin{vmatrix} a & c & a+c \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$

$R_1 \to R_1 - R_2 - R_3$ से $= \begin{vmatrix} -2b & -2b & 0 \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$

$= (-2b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$

$C_2 \to C_2 - C_1$ से $= (-2b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & -a & a \\ b & c & c \end{vmatrix}$

$= (-2b)\,[(1)(-ac - ac) - 0 + 0]$
$= (-2b)(-2ac)$
$= 4abc = RHS$ इतिसिद्धम्

7. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ तब A का सहखणडज आव्यूह adjA है।

$adjA = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

8. $F(x) = \frac{1}{x-a}$ में $x = a$ रखने पर

$F(a) = \frac{1}{a-a} = \frac{1}{0} =$ अपरिभाषित

चुँकि फलन $x = a$ पर परिभाषित ही नहीं, इसलिए यह फलन $x = a$ पर असतत है।

9. $y = x^2e^{-x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = x^2e^{-x}(-1) + e^{-x}.2x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-x}(2x - x^2)$

फलन वर्धमान होने के लिए $\frac{dy}{dx} > 0$

$\Rightarrow e^{-x}(2x - x^2) > 0$
$\Rightarrow e^{-x}x(2 - x) > 0$ $[\because e^{-x} > 0$ सदैव$]$
$\Rightarrow x > 0$ या $2 - x > 0$
$\Rightarrow x > 0$ या $x < 2$
$\Rightarrow 0 < x < 2$ या $x \in (0, 2)$

10. दिया है- $f(x) = \sin x + \cos x, x \in [0, \pi]$
$\therefore f'(x) = \cos x - \sin x$
$f'(x) = 0$
अतः $\cos x - \sin x = 0 \;\; \therefore \tan x = 1$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$

अतः $f(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$f(\pi) = \sin \pi + \cos \pi = 0 - 1 = -1$
$\therefore$ निरपेक्ष महत्तम मान $= \sqrt{2}$

11. माना $I = \int \frac{x\tan^{-1}}{(1+x^2)^{3/2}}dx \quad ...(1)$

माना $\tan^{-1} x = t$
$\Rightarrow x \tan t$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x}dx = dt \quad ...(2)$

समीकरण (2) का प्रयोग (1) में करने पर

$I = \int \frac{\tan t.t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}dt$

$= \int t\frac{\tan t}{\sec t}dt$

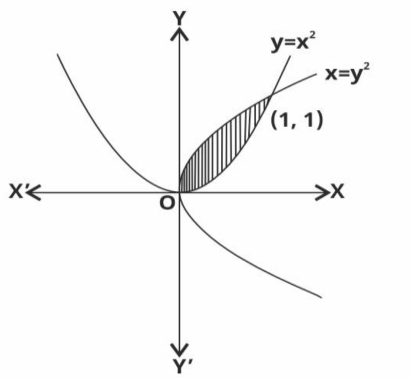
$= \int t \sin t dt$

$= t\int \sin t\, dt - \int\left(\frac{dt}{dt}\right)\left(\int \sin t\, dt\right)dt$

$= t.(-\cos t) - \int(1)(-\cos t)dt$
$= -t\cos t + \int \cos t\, dt$
$= -t\cos t + \sin t + c$

$I = -\tan^{-1}x.\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$

12. दिये गये दोनों परवलयों को अनुरेखण करने पर
$y = x^2 \quad ...(i)$
$y^2 = x \quad ...(ii)$



समीरकण (i) और (ii) को हल करने पर,
$\Rightarrow (x^2)^2 = x$
$\Rightarrow x^4 - x = 0$
$\Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$
$\therefore x = 0, 1$

जब x = 0, तब y = 0; जब x = 1, तब y = 1

इस प्रकार दोनों परवलायों के प्रतिच्छेद बिन्दु O(0 , 0) एवं A(1, 1) हैं।

यहाँ $y^2 = x$ अथवा $y = \sqrt{x} = f(x)$ और $y = x^2 = g(x)$,

जहाँ [0, 1] में $f(x) \geq g(x)$ है।

इसलिए छायांकित क्षेत्र का अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$$

$$= \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2] dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ वर्ग इकाई}$$

13. दी गई अवकल समीकरण में चरों का पृथक्करण करने पर,

$(\sin y + y \cos y)dy = x (2 \cos x + 1)dx$

$$\Rightarrow \int(\sin y + y\cos y)dy = \int x(2\cos x + 1)dx$$

$$\Rightarrow \int \sin y\, dy + \int y \cos y\, dy = \int x\left(2\cos x + 1\right)dx$$

$$\Rightarrow -\cos y + \left\{y\int \cos y\, dy - \int\left(\frac{dy}{dy}\right)\left(\int \cos y\, dy\right)dy\right\} =$$

$$x\int(2\cos x + 1)dx - \int\left(\frac{dx}{dx}\right)\left(\int(2\cos x + 1)dx\right)dx$$

$$\Rightarrow -\cos y + \{y\sin y - \int(1)(\sin y)dy\}$$

$$= x(2\sin x + x) - \int(1)(2\sin x + x)dx$$

$$\Rightarrow -\cos y + y\sin y - (-\cos y)$$

$$= x(2\sin x + x) - 2(-\cos x) - \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow y\sin y = 2x\sin x + x^2 + 2\cos x - \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow y\sin y = \frac{x^2}{2} + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

14. सदिश $\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश इकाई सदिश $= \dfrac{\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}}{|\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}|}$

$$= \frac{\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2}}$$

$$= \frac{\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$$

15. माना तीनों बिन्दुओं के स्थिति सदिश $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ हैं।

तब $\overline{OA} = 2\hat{i}$, $\overline{OB} = -\hat{i} - 4\hat{j}$, $\overline{OC} = -\hat{i} + 4\hat{j}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -3\hat{i} - 4\hat{j}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = 8\hat{j}$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$$

यहाँ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = -3\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{j} + 3\hat{i} - 4\hat{j} = 0$

अतः $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ तथा $\overrightarrow{CA}$ किसी त्रिभुज ABC की भुजाएं हैं।

अब $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$

दो भुजाओं की लम्बाई समान हैं। इसलिए दिए गए बिन्दु समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

16. यहाँ A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं इसलिए

$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$ ...(1)

अब $P(A' \cap B') = P[(A \cup B)']$ (द मॉर्गन प्रमेय)

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A). P(B)$ [समी. (1) से]

$= P(A') - P(B) [1 - P(A)]$

$= P(A') - P(B) P(A')$

$= P(A') [1 - P(B)]$

$= P(A') P(B')$

$P(A' \cap B') = P(A')P(B')$

अतः A' तथा B' भी स्वतंत्र हैं यदि A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

खंड - स

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

17. माना कि $y = \tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ...(1)

अब सभी के मुख्य मान रखने पर

$$\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4},\ \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

ये मान (i) में रखने पर

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi + 8\pi - 2\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$$

अथवा

माना कि $\alpha = \sin^{-1}\frac{5}{13} \therefore \sin\alpha = \frac{5}{13}$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} = \frac{\frac{5}{13}}{\sqrt{1 - \frac{25}{169}}} = \frac{5}{13} \times \frac{13}{12} = \frac{5}{12}$$

और $\beta = \cos^{-1}\frac{3}{5} \therefore \cos\beta = \frac{3}{5}$,

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta}$$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{5}{12}+\frac{4}{3}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{4}{3}}$$

$$=\frac{15+48}{36-20}=\frac{63}{16}$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta=\tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right)$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right)$$ (इतिसिद्धम्)

18. प्रश्नानुसार $f(x)=\begin{cases}kx+1, & x\le\pi\\ \cos x, & x>\pi\end{cases}$

$x=\pi$ पर $f(x) = kx + 1$ जब $x \in \pi$

L.H.L. $=\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}(kx+1)$

$=k\pi+1$

$=f(\pi)=k\pi+1$

R.H.L. $=\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^+}\cos x=-1$

$x = \pi$ पर f संतत है यदि

L.H.S. = R.H.S. = $f(\pi)$

$\therefore\ k\pi + 1 = -1$

अर्थात् $k=\frac{-1}{\pi}$

अथवा

प्रश्नानुसार $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$

दोनों ओर का लघुगणक लेने पर

$$\log y=\log\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}$$

$$=\frac{1}{2}\log[(x-1)(x-2)]-\frac{1}{2}\log[(x-3)(x-4)(x-5)]$$

$$=\frac{1}{2}[\log(x-1)+\log(x-2)]-\frac{1}{2}$$

$$[\log(x-3)+\log(x-4)+\log(x-5)]$$

अब x के सापेक्ष दोनों पक्षों का अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}\right]$$

y से गुणा करने पर और y का मान रखने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}\times\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}\right)$$

19. माना $I=\int\frac{1}{1+\cos x+\sin x}dx$

$$=\int\frac{1}{1+\left(\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right)+\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right)}dx$$

$$=\int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}+1-\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}}dx$$

$$=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2+2\tan\frac{x}{2}}dx$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)}dx \qquad \text{...(1)}$$

माना $\left.\begin{aligned}&1+\tan\frac{x}{2}=t\\ &\Rightarrow \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx=dt\end{aligned}\right\}$ ...(2)

समीकरण (2) का प्रयोग (1) में करने पर,

$$I=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|+c$$

$$=\log\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+c$$

अथवा

माना कि $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ ...(1)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos}+\sqrt{\sin x}}dx \qquad \text{...(2)}$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$2I=I+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=[x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2I=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\frac{\pi}{4}$$ (इति सिद्धम्)

20. माना कि $\vec{a} = 5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 2^2}$

$= \sqrt{25+1+4} = \sqrt{30}$

$\therefore \vec{a}$ के अनुदिश मात्रक सदिश $= \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$\therefore \vec{a}$ के अनुदिश 8 इकाई वाला सदिश $= \frac{8\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$= \frac{8\left(5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}\right)}{\sqrt{30}}$

$= \frac{40}{\sqrt{30}}\hat{i} - \frac{8}{\sqrt{30}}\hat{j} + \frac{16}{\sqrt{30}}\hat{k}$

अथवा

माना D, AB का मध्य बिन्दु है, तब

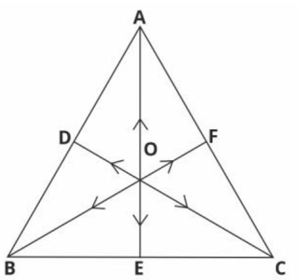
$\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$ ...(1)

E, BC का मध्य बिन्दु है, तब

$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC}}{2}$ ...(2)

F, AC का मध्य बिन्दु है, तब

$\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}$ ...(3)



समीकरण (1), (2) व (3) को जोड़ने पर,

$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} + \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}$

$= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}$

$= \frac{2\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)}{2}$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$\therefore \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (इति सिद्धम्)

खंड - द

निबन्धात्मक प्रश्न

21. माना, $I = \int \frac{x^2}{x^6 + x^3} dx$

$x^3 = t \Rightarrow 3x^2 dx = dt$ प्रतिस्थापित करने पर,

$I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2 + t} dt$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t(t+1)} dt$

$= \frac{1}{3}\int \left\{\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right\} dt$

$= \frac{1}{3}\left\{\int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t+1} dt\right\}$

$= \frac{1}{3}\left[\log|t| - \log|t+1|\right] + c$

$= \frac{1}{3}\left[\log\left|\frac{t}{t+1}\right|\right] + c$

$= \frac{1}{3}\log\left|\frac{x^2}{x^3+1}\right| + c$

अथवा

माना $I = \int_a^b f(a+b-x)\, dx$ ...(1)

t = a + b – x, तब dt = - dx या dx = - dt

साथ ही, जब x = a तब t = b, जब x = b तब t = a

प्रतिस्थापित करने पर, $I \int_b^a f(t)(-dt)$

$= -\int_b^a f(t) dt$

$= \int_a^b f(t) dt$

$= \int_a^b f(x) dx$

अत: $\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_a^b f(x) dx$ (इतिसिद्धम्)

पुन: माना $I_1 = \int_4^9 \frac{f(x)}{f(x) + f(13-x)} dx$ ...(2)

उपरोक्त गुणधर्म का प्रयोग करने पर,

$I_1 = \int_4^9 \frac{f(4+9-x)}{f(4+9-x) + f\{13-(4+9-x)\}} dx$

$= \int_4^9 \frac{f(13-x)}{f(13-x) + f(13-13+x)} dx$

$I_1 = \int_4^9 \frac{f(13-x)}{f(13-x) + f(x)}$ ...(3)

समीकरण (2) व (3) को जोड़ने पर,

$2I_1 = \int_4^9 \frac{f(x) + f(13-x)}{f(13-x) + f(x)} dx$

$= \int_4^9 1.dx$

$= [x]_4^9 = [9-4] = 5$

अत: $I_1 = 5$

या $\int_4^9 \frac{f(x)}{f(x) + f(13-x)} dx = 5$

22. प्रश्नानुसार

(x + y) dy + (x - y) dx = 0

या $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-y}{x+y}$

अब y = vx रखने पर

$\therefore \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

या $v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{x - vx}{x + vx} = -\frac{x(1-v)}{x(1+v)} = -\frac{1-v}{1+v}$

$\therefore x\frac{dv}{dx} = -\frac{1-v}{1+v} - v = \frac{-1+v-v-v^2}{1+v} = \frac{-1-v^2}{1+v}$

या $\dfrac{1+v}{1+v^2}dv=-\dfrac{dx}{x}$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$\int\dfrac{1+v}{1+v^2}dv=-\int\dfrac{dx}{x}$

या $\int\dfrac{1}{1+v^2}dv+\dfrac{1}{2}\int\dfrac{2v}{1+v^2}dv=-\log|x|+C$

या $\tan^{-1}v+\dfrac{1}{2}\log\left|1+v^2\right|=-\log|x|+C$

यहाँ y = vx रखने पर

$\tan^{-1}\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{2}\log\left|1+\dfrac{y^2}{x^2}\right|+\log|x|=C$

या $\tan^{-1}\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x^2+y^2}{x^2}\right|+\dfrac{1}{2}\log|x|^2=C$

या $\tan^{-1}\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x^2+y^2}{x^2}\times x^2\right|=C$

या $\tan^{-1}\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right)=C$

X = 1, y = 1 रखने पर

$\tan^{-1}\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}\log|1+1|=C$

या $c=\tan^{-1}1+\dfrac{1}{2}\log 2=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\log 2$

अत: अभीष्ट हल

$\dfrac{1}{2}\log\left|x^2+y^2\right|+\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=\dfrac{\pi}{x}+\dfrac{1}{2}\log 2$

या $\log\left(x^2+y^2\right)+2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=\dfrac{\pi}{2}+\log 2$

अथवा

दी गई अवकल समीकरण,

$\dfrac{dy}{dx}+y\tan x=y^2\sec x$

$\Rightarrow\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{y}\tan x=\sec x$ ...(1)

माना, $\dfrac{1}{y}=z\Rightarrow-\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}$ ...(2)

प्रतिस्थापित करने पर,

$-\dfrac{dz}{dx}+(\tan x)z=\sec x$

$\Rightarrow\dfrac{dz}{dx}-(\tan x)z=-\sec x$ ...(3)

यह एक रैखिक अवकल समीकरण है जिसकी तुलना

$\dfrac{dz}{dx}+pz=Q$ से करने पर

$P=-\tan x,\ Q=-\sec x$

$\text{I.F.}=e^{\int Pdx}=e^{\int(-\tan)dx}$

$=e^{-\int\tan x dx}=e^{-\log(\sec x)}$

$=e^{\log\cos x}=\cos x$

अत: अवकल समीकरण (3) का हल-

$z(IF)=\int(IF)Qdx+c$

$\Rightarrow z(\cos x)=\int(-\cos x).(-\sec x)dx+c$

$=-\int 1dx+c$

$\Rightarrow z(\cos x)=-x+c$

$\Rightarrow\dfrac{1}{y}\cos x=-x+c$

$\Rightarrow\dfrac{\cos x}{y}+x=c$

23 उद्देश्य फलन, अधिकतमीकरण Z = 3x + 2y

व्यवरोध, 5x + 2y ≤ 10

3x + 5y ≤ 15

x ≥ 0, y ≥ 0

(i) 5x + 2y ≤ 10 का क्षेत्र - रेखा 5x + 2y = 10 बिन्दुओं A(0, 5) तथा B(2, 0) से गुजरती है।

(0, 0), 5x + 2y ≤ 10 में रखने पर

5(0) + 2(0) ≤ 10

⇒ 0 ≤ 10 जो कि सत्य है।

अत: (0, 0), 5x +2y ≤ 10 के हल क्षेत्र में है।

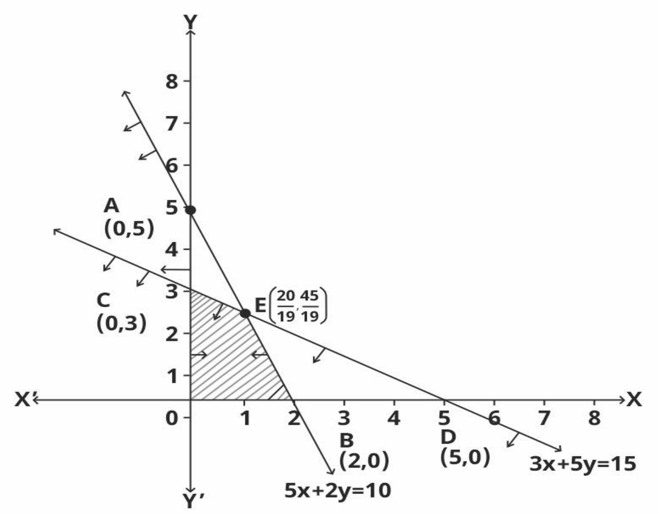
(ii) 3x + 5y ≤ 15 का क्षेत्र - रेखा 3x + 5y = 15, बिन्दुओं C(0,3) तथा D(5, 0) से गुजरती है। (0, 0), 3x + 5y ≤ 15 में रखने पर,

3(0) + 5(0) ≤ 15

⇒ 0 ≤ 15 जो कि सत्य है।

अत: (0, 0) 3x + 5y ≤ 15 के हल क्षेत्र में है।

(iii) x ≥ 0, y ≥ 0 का क्षेत्र - यह क्षेत्र प्रथम चतुर्थांश है।



ग्राफ से स्पष्ट है कि सुसंगत हल क्षेत्र OBECO है जहाँ कोणीय बिन्दु O(0, 0), B(2, 0), E$\left(\dfrac{20}{19},\dfrac{45}{19}\right)$, C(0, 3) है। इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्न सारणी से ज्ञात करते हैं-

कोणीय बिन्दु	Z = 3x + 2y
O(0, 0)	0
B(2, 0)	6
$E\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$	7.89 **अधिकतम**
C(0, 3)	6

अत: z = 3x + 2y का मान $E\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ पर अधिकतम है।

अत: $x = \frac{20}{19}$ तथा $y = \frac{45}{19}$ पर दिए गए उद्देश्य फलन का मान अधिकतम है।

अथवा

उद्देश्य फलन Z = x + 2y,

अवरोध $2x + y \geq 3$, $x + 2y \geq + 6$, $x, y \geq 0$

(i) प्रश्नानुसार $2x + y \geq 3$ का क्षेत्र-

रेखा 2x + y = 3 बिन्दु $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ और B(0, 3) से होकर जाती है।

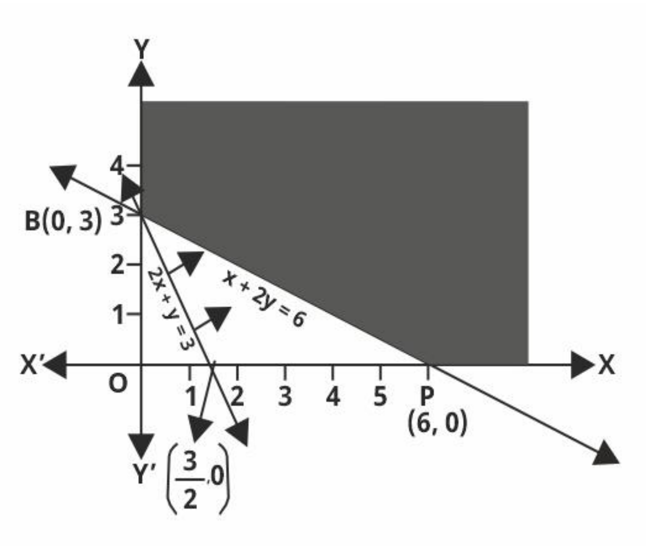
$\therefore$ 2x + y = 3 का आरेख रेखा AB है।

$2x + y \geq 3$ में x = 0, y = 0 रखने पर

$0 \geq 3$

जो सत्य नहीं है।

अर्थात् $2x + y \geq 3$ क्षेत्र के बिन्दु रेखा AB पर और उसके ऊपर है।



(ii) $x + 2y \geq 6$ का क्षेत्र-

x + 2y = 6 बिन्दु P(6, 0) और B(0, 3) से होकर जाती हैं।

$\therefore$ x + 2y = 6 का आरेख PB है।

$x + 2y \geq 6$ में x = 0, y = 0 रखने पर $0 \geq 6$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात् $x = 2y \geq 6$ क्षेत्र के बिन्दु रेखा PB पर और उसके ऊपर हैं।

(iii) $x \geq 0$, क्षेत्र के बिन्दु y-अक्ष पर और इसके दायीं ओर हैं।

(iv) $y \geq 0$ क्षेत्र के बिन्दु x-अक्ष पर और इसके ऊपर हैं।

समस्या का सुसंगत क्षेत्र YBPX है।

अर्थात् कानीय बिन्दु हैं। P(6, 0) तथा B(0, 3)।

अब इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्नांकित सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे-

कोनीय बिन्दु	Z के सगंत मान Z = x + 2y
P(6, 0)	$6 \rightarrow$ न्यूनतम
B(0, 3)	$6 \rightarrow$ न्यूनतम

अत: न्यूनतम z = 6 बिन्दु P पर भी तथ बिन्दु B पर भी।

अत: न्यूनतम Z = 6, AB के किसी भी बिन्दु पर है

क्योंकि x + 2y < 6 को लें। इसका सुसंगत क्षेत्र से कोई भी बिन्दु साझा नहीं हैं।

***