UTKARSH CLASSES

For Session 2022-23

RBSE

गणित

CLASS-XII

मॉडल पेपर्स

सॉल्यूशन सहित

RBSE द्वारा निर्धारित पाठ्यक्रम व ब्लूप्रिंट पर आधारित नवीनतम मॉडल पेपर

गणित (15)

MODEL PAPER (RBSE) 1

कक्षा-XII

समय : 3 घंटे 15 मिनट | पूर्णांक : 80

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
2. सभी प्रश्न करने अनिवार्य है।
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर पुस्तिका में ही लिखें।
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड है उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।

खंड - अ

1. बहुविकल्पीय प्रश्न **(12×1 = 12)**

(i) **मान लीजिए किसी समुच्चय {1, 2, 3, 4} में, R = {(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4,4),(1, 3), (3, 3), (3, 2)} द्वारा परिभाषित संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए।** [1]

(अ) R स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रामक नहीं है।
(ब) R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।
(स) R सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।
(द) R एक तुल्यता संबंध है।

(ii) **x तथा y के प्रदत्त किन मानों के लिए आव्यूहों के निम्नलिखित युग्म समान हैं?**

$$\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$ [1]

(अ) $x=-\frac{1}{3}, y=7$ (ब) ज्ञात करना संभव नहीं है
(स) $y=7, x=-\frac{2}{3}$ (द) $x=\frac{-1}{3}, y=-\frac{2}{3}$

(iii) **यदि $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}, x=3$ पर संतत है तब f(3) का मान होगा-** [1]

(अ) 6 (ब) 3
(स) 12 (द) अस्तित्व नहीं है

(iv) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ **बराबर है :** [1]

(अ) $\tan x+\cot x+c$ (ब) $\tan x-\cot x+c$
(स) $\tan x \cot x+c$ (द) $\tan x-\cot 2x+c$

(v) **वक्र $y^2=2x$ तथा कोटियों x=1, x = 4 से घिरा क्षेत्रफल है** [1]

(अ) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ वर्ग इकाई (ब) $\frac{28\sqrt{2}}{3}$ वर्ग इकाई
(स) $\frac{56}{3}$ वर्ग इकाई (द) इनमें से कोई नहीं

(vi) **यदि सदिश $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ तथा $3\hat{i}+a\hat{j}+5\hat{k}$ एक समतलीय है, तो 'a' का मान है-** [1]

(अ) 1 (ब) -2
(स) 4 (द) -4

(vii) **सदिश $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ के अनुदिश 5 ईकाई परिमाण वाला सदिश होगा।** [1]

(अ) $\pm\frac{5}{\sqrt{14}}(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})$ (ब) $\pm\frac{7}{\sqrt{14}}(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})$
(स) $\pm\frac{3}{\sqrt{14}}(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})$ (द) $\pm\frac{25}{\sqrt{14}}(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})$

(viii) **दो समतलों 2x+ 3y + 4z = 4 और 4x + 6y + 8z=12 के बीच की दूरी है:** [1]

(अ) $\frac{6}{\sqrt{29}}$ इकाई (ब) $\frac{4}{\sqrt{29}}$ इकाई
(स) $\frac{8}{\sqrt{29}}$ इकाई (द) $\frac{2}{\sqrt{29}}$ इकाई

(ix) **यदि $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=0$ तब $P(A|B)$ है:** [1]

(अ) 0 (ब) 1/2
(स) परिभाषित नहीं (द) 1

(x) **यदि $P\left(\frac{A}{B}\right)$ > P(A), तब निम्न में से कौन सही है।** [1]

(अ) $P(B|A) < P(B)$ (ब) $P(A\cap B) < P(A).P(B)$
(स) $P(B|A) > P(B)$ (द) $P(B|A) = P(B)$

(xi) **A और B दो छात्र हैं। किसी समस्या को सही प्रकार से हल करने की उनकी प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{4}$ है। यदि उनके एक सामान्य त्रुटि करने की प्रायिकता $\frac{1}{20}$ है और वे एक ही उत्तर प्राप्त करते हैं, तो उनके उत्तर के सही होने की प्रायिकता है** [1]

(अ) $\frac{1}{12}$ (ब) $\frac{1}{40}$
(स) $\frac{13}{120}$ (द) $\frac{10}{13}$

(xii) **बिन्दु (3,4,5) की y- अक्ष से लम्बवत् दूरी है** [1]

(अ) $\sqrt{34}$ (ब) $\sqrt{41}$
(स) 4 (द) 5

Utkarsh Classes & Edutech Pvt. Ltd.

2. रिक्त स्थान की पूर्ति करो- **(प्रत्येक 1 अंक)**

(i) आव्यूह $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ में अवयवों की संख्या _____ होगी। [1]

(ii) $x = 10$ पर $x^2 - 2$ का अवकलज _____ है। [1]

(iii) एक वृत्त की त्रिज्या 3cm है तो इसके क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर त्रिज्या के सापेक्ष _____ होगी ? [1]

(iv) $\int(\sin 2x)dx$ का मान_____ होगा ? [1]

(v) यदि $z = 2$ है तो इसके समतल के अभिलम्ब की मूल बिंदू से दूरी _____ होगी ? [1]

(vi) $P(A) = \frac{1}{5}$ तथा $P(B) = \frac{2}{5}$ और A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ है तो $P(A \cap B)$_____ होगा। [1]

3. अति लघुउत्तरीय प्रश्न **(प्रत्येक 1 अंक)**

(i) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मान बराबर है [1]

(ii) एक 2×2 कोटि के आव्यूह $A = [a_{ij}]$ की रचना कीजिए जिसके अवयव $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$ हैं [1]

(iii) यदि $y = \cos(\log x + e^x)$ हो तो dy/dx ज्ञात कीजिए। [1]

(iv) वक्र $y = \sqrt{4x-3} - 1$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{2}{3}$ है। [1]

(v) वक्रों $y = x$ एवं $y = x^2$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [1]

(vi) सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 7 इकाई है। [SIMILAR RBSE 2018] [1]

(vii) सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए। [RBSE 2013] [1]

(viii) XY–तल में, x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ वामावर्त दिशा में 30° का कोण बनाने वाला मात्रक सदिश लिखिए। [1]

(ix) बिंदु (5, 2, –4) से जाने वाली तथा सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ के समांतर रेखा का सदिश तथा कार्तीय समीकरणों को ज्ञात कीजिए । [1]

(x) दिए गए रेखा-युग्म $\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{j} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$ और $\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए। [1]

(xi) समतल $\vec{r}.(6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 1 = 0$ पर मूल बिंदु से डाले गए लंब इकाई सदिश की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए। [1]

(xii) यदि $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.5$ और $P(B|A) = 0.4$ हो तो $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए [1]

खंड - ब

लघुउत्तरीय प्रश्न **(प्रत्येक 2 अंक)**

4. x के किस मान के लिए $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\\ x\end{bmatrix} = O$ है? [2]

5. सारणिक का प्रसरण किए बिना सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$ [2]

6. दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$ [2]

7. a और b के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए $f(x) = \begin{cases} ax+1; & x \le 3 \\ bx+3; & x > 3 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 3$ पर संतत है। [SAME AS RBSE 2014] [2]

8. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$ द्वारा प्रदत्त फलन f, वर्धमान या ह्रासमान है। [2]

9. सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। [SIMILAR RBSE 2019] [2]

10. यदि $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है और $(\vec{x} - \vec{a}).(\vec{x} + \vec{a}) = 8$ तो $|\vec{x}|$ ज्ञात कीजिए। [2]

11. 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी में से एक के बाद एक तीन पत्ते बिना प्रतिस्थापित किए निकाले गए। पहले दो पत्तों का बादशाह और तीसरे का इक्का होने की क्या प्रायिकता होगी? [2]

12. सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $R = \{(a, b) : a \le b^2\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R, न तो स्वतुल्य है, न सममित हैं और न ही संक्रामक है। [2]

13. $\frac{\sin x}{\sin(x-a)}$ का x के सापेक्ष समाकलन करो- [2]

14. क्षेत्र $y^2 \le 6x$ और वृत्त $x^2+y^2=16$ में सम्मिलित क्षेत्र का क्षेत्रफल है: [2]

15. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$ का हल है- [2]

16. यदि तीन पासों को इस शर्त पर लुढ़काया जाता है कि उनमें से किन्हीं भी दो पासों पर समान फलक ऊपर नहीं आएँगे, तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि एक फलक पर संख्या 6 आएगी? [2]

खंड - स

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न **(प्रत्येक 3 अंक)**

17. $(\sin^{-1}x)^2 + (\cos^{-1}x)^2$का क्रमश: अधिकतम तथा न्यूनतम मान है - [3]

अथवा

$\sin^{-1}\left[\cos\left(\frac{33\pi}{5}\right)\right]$ का मान है

18. यदि $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ हो तो dy/dx ज्ञात कीजिए। [3]

अथवा

$x=a\left(\cos t+\log\tan\frac{t}{2}\right) y=a\sin t$ dy/dx ज्ञात कीजिए।

19. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\left(30-x^{3/2}\right)^2}dx$ [3]

अथवा

$\int_0^{\pi/4}\left(\tan^3 x+\tan x\right)dx$ का मान क्या हैं?

20. यदि $\hat{a}, xy-$ तल में एक इकाई सदिश है जो धनात्मक x-अक्ष के साथ 30° का कोण बनाता है, तो $\hat{a}$ किसके बराबर है? [3]

अथवा

एक समांतर चतुर्भुज की दो सन्निकट (आसन्न) भुजाएँ $2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ और $\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$ हैं। इसके विकर्णों को निरूपित करने वाले सदिशों के अदिश (बिन्दु) गुणनफल का परिमाण क्या हैं?

खंड - द

निबन्धात्मक प्रश्न **(प्रत्येक 4 अंक)**

21. $\frac{\sin^8 x-\cos^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}$ का x के सापेक्ष समाकलन करो - [4]

अथवा

$\int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

22. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y\cot x=4x\operatorname{cosec} x\,(x\neq 0)$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि y = 0 यदि $x=\frac{\pi}{2}$ [RBSE 2015] [4]

अथवा

अवकल समीकरण $(x\,dy-y\,dx)y\sin\left(\frac{y}{x}\right)$

$=(y\,dx+x\,dy)x\cos\left(\frac{y}{x}\right)$ को हल कीजिए।

23. निम्न अवरोधों के अंतर्गत Z = x + 2y का न्यूनतमीकरण तथा अधिकतमीकरण कीजिए:

$x+2y\geq 100$

$2x-y\leq 0$

$2x+y\leq 200$

$x, y\geq 0$ [4]

अथवा

एक कुटीर उद्योग निर्माता पैडेस्टल लैंप और लकड़ी के शेड बनाता है। प्रत्येक के निर्माण में एक रगड़ने / काटने और एक स्प्रेयर की आवश्यकता पड़ती है। एक लैंप के निर्माण में 2 घंटे रगड़ने/काटने और 3 घंटे स्प्रेयर की आवश्यकता होती है, जबकि एक शेड के निर्माण में 1 घंटा रगड़ने/काटने और 2 घंटे स्प्रेयर की आवश्यकता होती है। स्प्रेयर की मशीन प्रतिदिन अधिकतम 20 घंटे और रगड़ने/काटने की मशीन प्रतिदिन अधिकतम 12 घंटे के लिए उपलब्ध है। एक लैंप की बिक्री पर Rs 5 और एक शेड की बिक्री पर Rs 3 का लाभ होता है। यह मानते हुए कि सभी निर्मित लैंप और शेड बिक जाते है, तो बताइए वह निर्माण की प्रतिदिन कैसी योजना बनाए कि लाभ अधिकतम हो?

***

Utkarsh Classes & Edutech Pvt. Ltd.

उत्तरमाला मॉडल पेपर - 01
खंड - अ

1. बहुविकल्पीय प्रश्न

(i) [ब]

दिया है, A = {1, 2, 3, 4} तथा R = { (1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)}

1. R स्वतुल्य है, क्योकि (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) ∈ R
2. R सममित नहीं है, क्योंकि (1,2) ∈ R परन्तु (2,1) ∉ R
3. R संक्रामक है, क्योंकि (1, 3) ∈R,(3, 2) ∈ R = (1, 2) ∈ R

अत: 1, 2 तथा 3 से स्पष्ट है कि R स्वतुल्य तथा संक्रामक है परन्तु सममित नहीं है।

(ii) [ब]

यहाँ $\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

यदि दो आव्यूह समान हैं तो उनके संगत अवयव भी समान होते हैं, इसलिए 3x + 7 = 0, 5 = y – 2, y + 1 = 8 तथा 2 – 3x = 4

हल करने पर, $y = 7, x = -\frac{7}{3}$ तथा $x = -\frac{2}{3}$ इस प्रकार x का कोई अद्वितीय मान नहीं है।

(iii) [अ]

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}, x = 3$$

$$f(3+0) = \lim_{h\to 0} f(3+h)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{3+h-3}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9+6h+h^2-9}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(6+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (6+h)$$

$$= 6$$

फलन x = 3 पर संतत है इसलिए

f(3) = f(3 + 0)

f(3) = 6

(iv) [ब]

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2} dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 \cos^2 x} dx$$

$$= \int \sec^2 x dx + \int \operatorname{cosec}^2 x dx$$

$$= \tan x - \cot x + c$$

(v) [ब]

$$A = 2\int_1^4 \sqrt{2}\sqrt{x}\, dx$$

$$A = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$A = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left[4^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

$$= \frac{28\sqrt{2}}{3}$$ वर्ग इकाई

(vi) [द]

$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{C} = 3\hat{i} + a\hat{j} + 5\hat{k}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & a & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$2(10+3a) + (5+9) + 1(a-6) = 0$$

$$20 + 6a + 14 + a - 6 = 0$$

$$7a + 28 = 0$$

$$a = \frac{-28}{7}$$

$$a = -4$$

(vii) [अ]

$\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

$|\vec{a}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$\vec{b} = 5\hat{a}$

$\vec{b} = 5\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$\vec{b} = \frac{5}{\sqrt{14}}\left(2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}\right)$

(viii) [द]

दिए गए समतलों के समीकरण:

$2x + 3y + 4z = 4$ ...(1) और $4x + 6y + 8z = 12$

और $\Rightarrow 2x + 3y + 4z = 6$ ...(2)

$$D = \left|\frac{d_2 - d_1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| \Rightarrow D = \left|\frac{6-4}{\sqrt{(2)^2+(3)^2+(4)^2}}\right|$$

$$\Rightarrow D = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

इस प्रकार, दोनों समतलों के बीच की दूरी $\frac{2}{\sqrt{29}}$ इकाई है।

(ix) [स]

परिभाषित नहीं

Utkarsh Classes & Edutech Pvt. Ltd.

$P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=0$

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{0}$

इस प्रकार, $P(A|B)$ परिभाषित नहीं है।

(x) [स]

$P(B|A) > P(B)$

$P(A|B) > P(A)$

$\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} > P(A)$

$\Rightarrow P(A\cap B) > P(A).P(B)$

$\Rightarrow P(B|A) > P(A).P(B)$

(xi) [द]

$P(E_1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

$P(E_2)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$

$P(E/E_1)=1, P(E/E_2)=\frac{1}{20}$

$P(E_1/E)=\frac{P(E_1|E)}{P(E)}=\frac{P(E_1).P(E\setminus E_1)}{P(E_1).P(E/E_1)+P(E_2).P(E/E_2)}$

$=\frac{\frac{1}{12}\times 1}{\frac{1}{12}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{20}}=\frac{1/2}{\frac{10+3}{120}}=\frac{120}{12\times 3}=\frac{10}{13}$

(xii) [अ]

$d=\sqrt{(3)^2+(5)^2}=\sqrt{34}$

2. रिक्त स्थान की पूर्ति करो -

(i) चूँकि आव्यूह की कोटी 3 × 3 है तो अवयवों की संख्या 3 × 3 = 9 होगी।

(ii) x = 10 पर x^2 - 2 का अवकलज

$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[(10+h)^2-2\right]-(10^2-2)}{h}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{20h+h^2}{h}$

$=\lim_{x\to 0}[20+h]=20$

(iii) $\frac{dA}{dr}=\frac{d(\pi r^2)}{dr}=2\pi r$

जहाँ r = 3

$2\times\pi\times 3=6\pi\ cm^2/cm$

(iv) $\int(\sin 2x)dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

(v) चूँकि समतल z = 2 का अभिलम्ब z अक्ष है इसलिए

यहाँ x = 0 तथा y = 0 है

तो z = 2 की मूलबिंदू से दूरी 2 इकाई है।

(vi) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$=\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{25}$

3. अति लघुउत्तरीय प्रश्न

(i) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right), \frac{7\pi}{6}\notin[0,\pi]$

$=\cos^{-1}\left\{\cos\left(2\pi-\frac{5\pi}{6}\right)\right\}=\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}\in[0,\pi]$

(ii) यहाँ $a_{ij}=\frac{(i+2j)^2}{2}$ इसलिए, आव्यूह के अवयव:

$a_{11}=\frac{(1+2)^2}{2}=\frac{9}{2}; a_{12}=\frac{(1+4)^2}{2}=\frac{25}{2}$

$a_{21}=\frac{(2+2)^2}{2}=8; a_{22}=\frac{(2+4)^2}{2}=18$

$A=\begin{bmatrix}\frac{9}{2} & \frac{25}{2}\\ 8 & 18\end{bmatrix}$

(iii) y= cos(log x + e^x)

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx}=-\sin(\log x+e^x)\left[\frac{1}{x}+e^x\right]$

$\frac{dy}{dx}=-\sin(\log x+e^x)\left(\frac{1+xe^x}{x}\right)$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x}(1+xe^x)\sin(\log x+e^x)$

(iv)

$y=\sqrt{4x-3}-1$

$m=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(4x-3)^{\frac{-1}{2}}.4=\frac{2}{\sqrt{4x-3}}$

$\frac{2}{\sqrt{4x-3}}=\frac{2}{3}$

$4x-3=9$

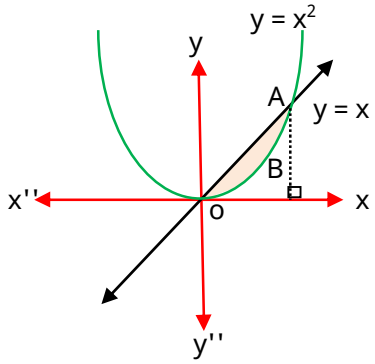
$x=3$

$y=\sqrt{4x-3}-1$

$x=3, y=\sqrt{4(3)-3}-1=2$

अत: अभिष्ट बिन्दु (3, 2) होगा।

(v) रेखा y = x और वक्र $y=x^2$ को हल करने पर प्रतिच्छेद बिन्दु A(1, 1) है।



$A = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx$

$A = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ वर्ग इकाई

(vi) $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}$ है।

$\vec{a}$ के अनुदिश ओर 7 परिमाण वाला सदिश $\vec{b} = 7\hat{a} = 7\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}2\hat{j}\right) = \frac{7}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{14}{\sqrt{5}}\hat{j}$ है।

(vii) सदिश $\vec{a}$ का सदिश $\vec{b}$ पर प्रक्षेप

$= \frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}.\vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (1)^2}}(2.1 + 3.2 + 2.1)$

$= \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{5}{3}\sqrt{6}$

(viii) दिया है कि $\vec{r}$ एक मात्रक सदिश है इसलिए $\vec{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$

जहां θ मात्रक सदिश और x-अक्ष की धनात्मक दिशा के बीच का कोण है। इसलिए $\theta = 30^\circ$ के लिए

$\vec{r} = \cos 30^\circ\hat{i} + \sin 30^\circ\hat{j} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}$

अत: अभीष्ट मात्रक सदिश $\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}$ है।

(ix) ज्ञात है कि $\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$

रेखा का सदिश समीकरण :

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$

$\vec{r} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$

चूंकि $\vec{r}$ रेखा पर स्थित किसी बिन्दु की स्थिति सदिश है, इसलिए

$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$

$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (5 + 3\lambda)\hat{i} + (2 + 2\lambda)\hat{j} + (-4 - 8\lambda)\hat{k}$

λ का विलोपन करने पर हम पाते हैं कि $\frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-8}$

जो रेखा के समीकरण का कार्तीय रूप है।

(x) मान लीजिए $\vec{b}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b}_2 = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

दोनों रेखाओं के मध्य कोण θ है, इसलिए

$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1.\vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right| = \left|\frac{(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}).(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+4+36}}\right|$

$= \left|\frac{3+4+12}{3\times 7}\right| = \frac{19}{21}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$

(xi) समतल के ज्ञात समीकरण को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$\vec{r}.(-6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 1$

$|\vec{n}| = |-6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}| = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7$

इसलिए (1) के दोनों पक्षों को 7 से भाग करने पर हम पाते हैं कि

$\vec{r}.\left(-\frac{6}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k}\right) = \frac{1}{7}$

समतल का समीकरण $\vec{r}.\hat{n} = d$ के रूप का है।

इससे स्पष्ट है कि $\hat{n} = -\frac{6}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k}$ समतल के लंब इकाई सदिश है जो मूल बिन्दु से गुजरता है।

इस प्रकार $\vec{n}$ की दिक्-कोसाइन $\frac{-6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$ है।

(xii) $P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.4 = \frac{P(A \cap B)}{0.8}$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.4 \times 0.8 = 0.32$

खंड - ब

लघुउत्तरीय प्रश्न

4. दिया है $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\x\end{bmatrix} = O$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}1+4+1 & 2+0+0 & 0+2+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\x\end{bmatrix} = O$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}6 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\x\end{bmatrix} = O$

$\Rightarrow [0 + 4 + 4x] = [0]$

$\Rightarrow 4 + 4x = 0$

$\Rightarrow x = -1$

5. बायाँ पक्ष $\begin{vmatrix}a & a^2 & bc\\ b & b^2 & ca\\ c & c^2 & ab\end{vmatrix}$

$[R_1 \to aR_1, R_2 \to bR_2, R_3 \to cR_3]$

$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix}a^2 & a^3 & abc\\ b^2 & b^3 & abc\\ c^2 & c^3 & abc\end{vmatrix}$

$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix}a^2 & a^3 & 1\\ b^2 & b^3 & 1\\ c^2 & c^3 & 1\end{vmatrix}$

$[c_1 \Leftrightarrow c_3]$

$= (-1)^1\begin{vmatrix}1 & a^3 & a^2\\ 1 & b^3 & b^2\\ 1 & c^3 & c^2\end{vmatrix}$

$[c_2 \leftrightarrow c_3]$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \text{दायाँ पक्ष, इति सिद्धम्}$$

6. बायाँ पक्ष $= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a(a^2+1) & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & b(b^2+1) & bc^2 \\ a^2c & b^2c & c(c^2+1) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc}.abc\begin{vmatrix} a^2+1 & b^2 & c^2 \\ a^2 & b^2+1 & c^2 \\ a^2 & b^2 & c^2+1 \end{vmatrix}$$

$c_1 \to c_1 + c_2 + c_3$

$$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2+c^2 & b^2 & c^2 \\ 1+a^2+b^2+c^2 & b^2+1 & c^2 \\ 1+a^2+b^2+c^2 & b^2 & c^2+1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 \\ 1 & b^2+1 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2+1 \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1$; $R_3 \to R_3 - R_1$

$$= (1+a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$ c_1 के सापेक्ष प्रसार करने पर

$= (1+a^2+b^2+c^2) \times 1 = 1+a^2+b^2+c^2$ दायाँ पक्ष

7. दिया है फलन $x = 3$ पर संतत है। इसलिए,
बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = f(3)

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} ax+1 = \lim\limits_{x\to 3^+} bx+3 = 3a+1$

$\Rightarrow 3a+1 = 3b+3 = 3a+1$

$\Rightarrow 3a = 3b+2 \Rightarrow a = b+\frac{2}{3}$

8. $f(x) = \sin x + \cos x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

$f'(x) = \cos x - \sin x$

$f'(x) = 0$

$\sin x = \cos x$

$\Rightarrow \tan x = 1$

$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

$0 \le x \le 2\pi$

$x = \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{5\pi}{4}$

अंतराल $[0, 2\pi]$

तीन असंयुक्त अंतरालों, नामत: $\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

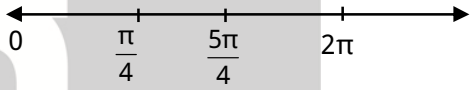
$f'(x) > 0$

$x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

f अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ में वर्धमान है।

$f'(x) < 0, x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

f अंतराल $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ में ह्रासमान है।



अंतराल	f'(x) का चिन्ह्	फलन की प्रकृति
$\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$	> 0	f वर्धमान है
$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	< 0	f ह्रासमान है
$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$	> 0	f वर्धमान है

9. दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ निम्न द्वारा प्रदत्त है।

$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ से प्राप्त होता है।

$\vec{a}.\vec{b} = (\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}).(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) = 1-1-1 = -1$

$|\vec{a}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$|\vec{b}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

इसलिए हम पाते हैं कि $\cos\theta = \frac{-1}{3}$

10. क्योंकि $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है, इसलिए $|\vec{a}| = 1$

$(\vec{x}-\vec{a}).(\vec{x}+\vec{a}) = 8$

$\vec{x}.\vec{x} + \vec{x}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{x} - \vec{a}.\vec{a} = 8$

$|\vec{x}|^2 - 1 = 8$

$|\vec{x}|^2 = 9$

$|\vec{x}| = 3$ (क्योंकि सदिश का परिमाण सदैव शून्येतर होता है)

11. मान लें कि K घटना 'निकाला गया पत्ता बादशाह है' को और A घटना 'निकाला गया पत्ता इक्का है' को व्यक्त करते हैं। स्पष्टतया हमें $P(K|K)$ ज्ञात करना है।

$P(K) = \frac{4}{52}$

साथ ही $P(K|K)$ यह ज्ञात होने पर कि 'पहले निकाला गया पत्ता बादशाह है' पर दूसरे पत्ते का बादशाह होने की प्रायिकता को दर्शाता है। अब गड्डी में (52–1) = 51 पत्ते हैं जिनमें तीन बादशाह है

$P(K) = \frac{3}{51}$

अंतत: $P(A|KK)$ तीसरे निकाले गए पत्ते का इक्का होने की सप्रतिबंध प्रायिकता है जब कि हमें ज्ञात है कि दो बादशाह पहले ही निकाले जा चुके हैं। अब गड्डी में 50 पत्ते रह गए हैं।

$P(A|KK) = P(A|KK) = \frac{4}{50}$

प्रायिकता के गुणन नियम द्वारा हमें प्राप्त होता है कि

$P(KKA) = P(K)\ P(K|K)\ P(A|KK)$

$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{4}{50} = \frac{2}{5525}$

12. माना A = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है और $R = \{(a, b) : a \le b^2\}$

1. R स्वतुल्य नहीं है, क्योंकि $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ से कम नहीं है।
2. R सममित नहीं है, क्योंकि $a \le b^2$ तो b, a^2 से कम या बराबर नहीं है, जैसे $-2 < 5^2$ परन्तु 5, 2^2 से कम नहीं है।
3. R संक्रामक नहीं है, माना a = 2, b = –2 और c = –1 तब $2 < (-2)^2$, $-2 < (-1)^2$ परन्तु 2, $(-1)^2$ 1 से कम नहीं है। अत: 1,2 तथा 3 से स्पष्ट है कि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक नहीं है।

13. $I = \int \frac{\sin x}{\sin(x-a)}dx$

माना $(x-a) = t \quad \Rightarrow dx = dt$

$I = \int \frac{\sin x}{\sin(x-a)}dx = \int \frac{\sin(t+a)}{\sin t}dt$

$I = \int \frac{\sin t\cos a + \cos t\sin a}{\sin t}dt$

$I = \int (\cos a + \cot t \sin a)dt = t\cos a + \sin a \log|\sin t| + C_1$

$I = (x-a)\cos a + \sin a \log|\sin(x-a)| + C_1$

$I = x\cos a + \sin a \log|\sin(x-a)| - a\cos a + c_1$

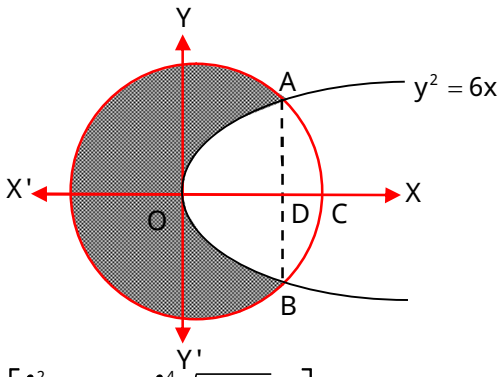
$I = \sin a \log|\sin(x-a)| + x\cos a + c$

14. दी गई समीकरण

$x^2 + y^2 = 16 \quad ...(1)$

और $y^2 = 6x \quad ...(2)$

क्षेत्र $y^2 \ge 6x$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ में सम्मिलित क्षेत्र का क्षेत्रफल



$= 2\left[\int_0^2 \sqrt{6x}dx + \int_2^4 \sqrt{16 - x^2}dx\right]$

$= 2\left[\sqrt{6}\left\{\frac{x^{3/2}}{3/2}\right\}_0^2\right] + 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_2^4$

$= 2\sqrt{6} \times \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^2 + 2\left[8.\frac{\pi}{2} - \sqrt{16-4} - 8\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

$= \frac{4\sqrt{6}}{3}\left(2\sqrt{2}\right) + 2\left[4\pi - \sqrt{12} - 8\frac{\pi}{6}\right]$

$= \frac{16\sqrt{3}}{3} + 8\pi - 4\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}$

$= \frac{4}{3}\left[4\sqrt{3} + 6\pi - 3\sqrt{3} - 2\pi\right]$

$= \frac{4}{3}\left[\sqrt{3} + 4\pi\right]$ वर्ग इकाई

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \pi(4)^2 = 16\pi$ इकाई

अभीष्ट क्षेत्रफल $= 16\pi - \frac{4}{3}\left[4\pi + \sqrt{3}\right]$

$= \frac{4}{3}\left[4 \times 3\pi - 4\pi - \sqrt{3}\right]$

$= \frac{4}{3}\left(8\pi - \sqrt{3}\right)$ वर्ग इकाई

15.

$\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$

$\frac{dy}{dx} = 1(1+x) + y(1+x)$

$\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y)$

$\int \frac{1}{1+y}dy = \int (1+x)dx$

$\log(1+y) = x + \frac{x^2}{2} + c$

16. B = एक फलक 6 है

A = दो पासों समान फलक नहीं है

$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times 3}{\frac{6}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}}$$

$$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{5\times 4\times 3}{6\times 5\times 4}$$

$$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{1}{2}$$

खंड - स

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

17. $\left(\sin^{-1}x\right)^2+\left(\cos^{-1}x\right)^2$

$$=\left(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x\right)^2-2\sin^{-1}x\cos^{-1}x$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-2\sin^{-1}x\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-\pi\sin^{-1}x+2\left(\sin^{-1}x\right)^2$$

$$=2\left[\left(\sin^{-1}x\right)^2-\frac{\pi}{2}\sin^{-1}x+\frac{\pi^2}{8}\right]$$

$$=2\left[\left(\sin^{-1}x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{\pi^2}{16}\right].$$

न्यूनतम मान $2\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{\pi^2}{8}$ तथा

अधिकतम मान $2\left[\left(\frac{-\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{\pi^2}{16}\right]=\frac{5\pi^2}{4}.$

अथवा

$$\sin^{-1}\left[\cos\left(\frac{33\pi}{5}\right)\right]=\sin^{-1}\left[\cos\left(6\pi+\frac{3\pi}{5}\right)\right]$$

$$=\sin^{-1}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right]\left[\because\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta\right]$$

$$=\sin^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)\right]=\sin^{-1}\left(-\sin\frac{\pi}{10}\right)$$

$$=-\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{10}\right)\left[\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x\right]$$

$$=-\frac{\pi}{10}\left[\because\sin^{-1}(\sin x)=x,x\in\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

18. $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^x+x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^x=u$ $\qquad$ $x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=v$

$\Rightarrow y=u+v$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\qquad\ldots(1)$$

$u=\left(x+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\log u=x\log\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=x.\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)}\times\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+\log\left(x+\frac{1}{x}\right).1$$

$$\frac{du}{dx}=u\left[\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)}\frac{\left(x^2-1\right)}{x^2}+\log\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\right]$$

$$\frac{du}{dx}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left[\frac{\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)}+\log\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\right]\qquad\ldots(2)$$

$v=x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$$\log v=\left(1+\frac{1}{x}\right)\log x$$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}=\left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}+\log x\left(0-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{dv}{dx}=v\left\{\frac{(x+1)}{x^2}-\frac{\log x}{x^2}\right\}$$

$$\frac{dv}{dx}=x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left\{\frac{(x+1)-\log x}{x^2}\right\}\qquad\ldots(3)$$

समीकरण (2) एवं (3) के मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{dy}{dx}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left[\frac{\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)}+\log\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\right]$$

$$+x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left\{\frac{(x+1)-\log x}{x^2}\right\}$$

अथवा

$x=a\left(\cos t+\log\tan\frac{t}{2}\right)$ $\qquad$ $y=a\sin t$

$$\frac{dx}{dt}=a\left[-\sin t+\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\frac{d}{dt}\tan\frac{t}{2}\right]$$

$=a\left[-\sin t+\frac{1}{\sin t}\right]$ & $\frac{dy}{dt}=a\cos t;$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\div\frac{dx}{dt}=\frac{a\cos t}{a\frac{\cos^2 t}{\sin t}}=\tan t$$

19. $I=\int_4^9\frac{\sqrt{x}}{\left(30-x^{3/2}\right)^2}dx$

माना $30-x^{3/2}=t$

$-\frac{3}{2}\sqrt{x}dx=dt$ अथवा $\sqrt{x}dx=-\frac{2}{3}dt$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\left(30-x^{3/2}\right)^2}dx=-\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{t}\right]$$

Utkarsh Classes & Edutech Pvt. Ltd.

$$I=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{\left(30-x^{3/2}\right)}\right]$$

$$I=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{\left(30-x^{3/2}\right)}\right]_4^9$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30-27)}-\frac{1}{(30-8)}\right]=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{22}\right]=\frac{19}{99}$$

अथवा

$$I=\int_0^{\pi/4}\left(\tan^3x+\tan x\right)dx$$

$$I=\int_0^{\pi/4}\tan x\left(\tan^2x+1\right)dx$$

$$I=\int_0^{\pi/4}\tan x.\sec^2x\,dx$$

let $\tan x=t$

$\sec^2x\,dx=dt$

$$I=\int_0^1 t.dt$$

$$I=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

20. $|\hat{a}|=r=1$

$\cos\alpha=\frac{x}{r}$; $\cos\beta=\frac{y}{r}$

$\cos30^0=\frac{x}{1}$; $\cos60^0=\frac{y}{1}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{x}{1}$; $\frac{1}{2}=\frac{y}{1}$

$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $y=\frac{1}{2}$

$\hat{a}=x\hat{i}+y\hat{j}+o\hat{k}$ (xy तल में $z=0$)

$\hat{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}j=\frac{\sqrt{3}i+\hat{j}}{2}$

अथवा

$\vec{a}=\left(2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}\right)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{4+16+25}=\sqrt{45}$

$\vec{b}=\left(\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}\right)\Rightarrow|\vec{b}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$

diangonal $=\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\vec{b}$

$=\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

$=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

$=45-14$

$=31$

खंड - द

निबन्धात्मक प्रश्न

21. $\frac{\sin^8x-\cos^8x}{1-2\sin^2x\cos^2x}$

$$=\frac{\left(\sin^4+\cos^4x\right)\left(\sin^4x-\cos^4x\right)}{\sin^2x+\cos^2x-\sin^2x\cos^2x-\sin^2x\cos^2x}$$

$$=\frac{\left(\sin^4x+\cos^4x\right)\left(\sin^2x-\cos^2x\right)\left(\sin^2x+\cos^2x\right)}{\left(\sin^2x-\sin^2x\cos^2x\right)+\left(\cos^2x-\sin^2x\cos^2x\right)}$$

$$=\frac{\left(\sin^4x+\cos^4x\right)\left(\sin^2x-\cos^2x\right)}{\sin^2x\left(1-\cos^2x\right)+\cos^2x\left(1-\sin^2x\right)}$$

$$=\frac{\left(\sin^4x+\cos^4x\right)\left(\sin^2x-\cos^2x\right)}{\sin^4x+\cos^4x}=-\cos2x$$

इसलिए

$$I=\int\frac{\sin^8x-\cos^8x}{1-2\sin^2x\cos^2x}dx=\int-\cos2x\,dx=-\frac{\sin2x}{2}+c$$

अथवा

मान लीजिए कि $I=\int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx$

$$I=\int_0^{\pi/2}\log\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\pi/2}\log\cos x\,dx$$

I, के दोनों मानों को जोड़ने पर हम पाते हैं

$$2I=\int_0^{\pi/2}\left(\log\sin x+\log\cos x\right)dx$$ (log 2 जोड़ने एवं घटाने पर)

$$=\int_0^{\pi/2}\log\sin2x\,dx-\int_0^{\pi/2}\log2\,dx$$

प्रथम समाकलन $2x=t$ रखने पर $2\,dx=dt$ जब $x=0$ तो $t=0$

और जब $x=\frac{\pi}{2}$ तो $t=\pi$

$$2I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log\sin t\,dt-\frac{\pi}{2}\log2$$

$$=\frac{2}{2}\int_0^{\pi/2}\log\sin t\,dt-\frac{\pi}{2}\log2$$ [P_6 से क्योंकि $\sin(\pi-t)=\sin t$]

$$=\int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx-\frac{\pi}{2}\log2$$ [चर t को x में परिवर्तित करने पर]

$$2I=I-\frac{\pi}{2}\log2$$

$$\int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx=\frac{-\pi}{2}\log2$$

22. $\frac{dy}{dx}+y\cot x=4x\,\mathrm{cosec}\,x$

दी गई अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+py=Q$ के रूप में है, जहाँ P = $\cot x$ और $Q=4x\,\mathrm{cosec}\,x$

इसलिए, $I.F=e^{\int Pdx}=e^{\int\cot x\,dx}=e^{\log|\sin x|}=\sin x$

$y(I.F) = \int (Q \times I.F)dx + c$

$\Rightarrow y\sin x = \int (4x\,\text{cosec}\, x.\sin x)dx + c$

$\Rightarrow y\sin x = 4.\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y\sin x = 2x^2 + c$ .....(1)

दिया है, $y = 0$ यदि $x = \frac{\pi}{2}$ इसलिए समीकरण (1) से

$0 = 2 \times \frac{\pi^2}{4} + c$

$c = -\frac{\pi^2}{2}$

c का मान समीकरण (1) में रखने पर

$y\sin x = 2x^2 - \frac{\pi^2}{2}$

अत:, ये समीकरण दी गई अवकल समीकरण का विशिष्ट हल है।

अथवा

दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखिल रूप में लिखा जा सकता है।

$\left[xy\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]dy = \left[xy\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{xy\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{xy\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$

दायें पक्ष पर अंश एवं हर दोनों को x^2 से भाग देने पर हम पाते हैं :

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{x^2}\right)\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right) - \cos\left(\frac{y}{x}\right)}$ ...(1)

माना y=vx

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + v^2\sin v}{v\sin v - \cos v}$ [समीकरण (1) और (2) का प्रयोग करने पर]

$x\frac{dv}{dx} = \frac{2v\cos v}{v\sin v - \cos v}$

$\left(\frac{v\sin v - \cos v}{v\cos v}\right)dv = \frac{2dx}{x}$

$\int\left(\frac{v\sin v - \cos v}{v\cos v}\right)dv = 2\int\frac{1}{x}dx$

$\int \tan v dv - \int\frac{1}{v}dv = 2\int\frac{1}{x}dx$

$\log|\sec v| - \log|v| = 2\log|x| + \log|C_1|$

$\log\left|\frac{\sec v}{vx^2}\right| = \log|C_1|$

$\frac{\sec v}{vx^2} = \pm C_1$ ...(3)

समीकरण (3) में v को y/x से प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$\frac{\sec\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)(x^2)} = C$ जहाँ $C = \pm C_1$

$\sec\left(\frac{y}{x}\right) = Cxy$

यह दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

23. सर्वप्रथम हम रेखाओं

x + 2y = 100 ...(i)

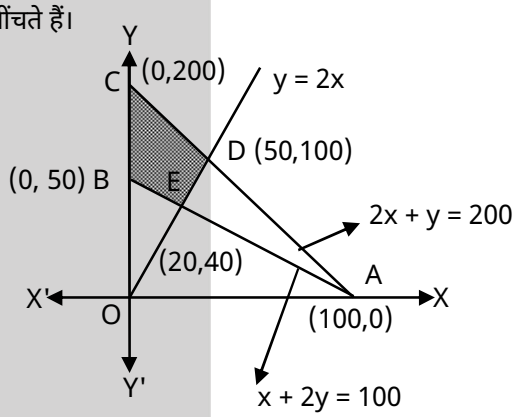
2x – y = 0 ...(ii)

2x + y = 200 ...(iii)

x = 0, ...(iv)

y = 0 ...(v)

के आलेख खींचते हैं।



स्पष्ट है कि सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) BCDE है जोकि परिबद्ध है। जिसके कोनीय बिन्दु B(0, 50), C(0, 200), D(50, 100) और E(20, 40) हैं।

अब हम कोनीय बिन्दुओं पर Z का मान ज्ञात करते हैं

अत: बिन्दु (0, 200) पर अधिकतम मान 400 है।

तथा बिन्दु B (0, 50) व E (20,40) पर Z का न्यूनतम मान 100 है।

अर्थात् (0, 50) और (20,40) को मिलाने वाले रेखाखण्ड के प्रत्येक बिन्दु पर Z का न्यूनतम मान 100 है।

कोनीय बिन्दु	उद्देशीय फलन Z = x + 2y का मान
B (0, 50)	100 ← (न्यूनतम)
C (0, 200)	400 ← (अधिकतम)
D (50, 100)	250
E (20, 40)	100 ← (न्यूनतम)

अथवा

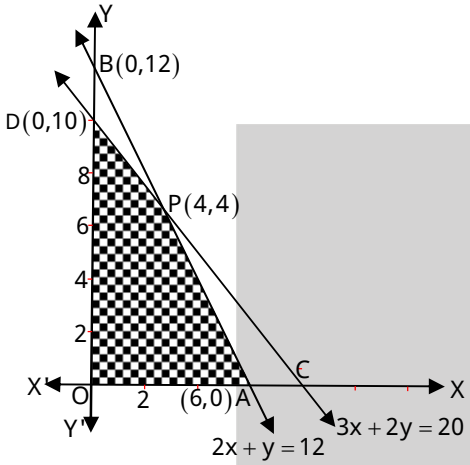
माना पैडेस्टेल लैंप की संख्या = x और लकड़ी के शेड की संख्या =y

दिये गये आँकड़ों से निम्न सारणी बनाते हैं

	रगड़ने/काटने	स्प्रेयर	लाभ
पैडेस्टेल	2	3	₹ 5
लकड़ी के शेड	1	2	₹ 3
समय उपलब्ध (घण्टे में)	12	20	

दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय निरूपण इस प्रकार है–

Z = 5 + 3y का अधिकतम मान निकालिए–
जबकि $2x + y \leq 12$ ...(i)
$3x + 2y \leq 20$ ...(ii)
$x \geq 0$ ...(iii)
$y \geq 0$ ...(iv)
उपरोक्त असमिकाओं के संगत समिकाओं का आलेख खींचते हैं।
चित्र से स्पष्ट है कि संगत क्षेत्र OABC , (छायांकित)परिबद्ध है जिसके कोनीय बिन्दु O(0, 0), A(6, 0),B(4, 4), C(10, 10) हैं।
अब हम इन कोनीय बिन्दुओं पर Z का मान ज्ञात करते हैं



कोनीय बिन्दु	Z का संगत मान Z = 5x+ 3y
O(0,0)	0
A(6,0)	30
B(4,4)	32 ← अधिकतम
C(0,10)	30

अत: B(4, 4) पर Z = 32 अधिकतम है।
इसलिए पैडेस्टेल लैंप की संख्या = 4, लकड़ी के शेड की संख्या = 4

♦ ♦ ♦

#अब कामयाबी पर होगा सबका हक़

UTKARSH CLASSES CLASS 6-12
Smart e-Learning Programme

उत्कर्ष एप से घर बैठे कीजिए ऑनलाइन ट्यूशन और बनिए क्लास में टॉपर

उत्कर्ष एप में गुणवत्तामूलक स्कूली शिक्षा के ऑनलाइन कोर्सेस नाममात्र के शुल्क में उपलब्ध

QR Code Scan कर आज ही 'उत्कर्ष एप' डाउनलोड करें

Academic Session 2022-23

Class VI-VIII	~~₹10,000~~	₹1999	CBSE | RBSE & Other 7 State Boards
Class IX-X	~~₹15,000~~	₹2999	
Class XI-XII	~~₹18,000~~	₹3499	

₹1200/- per subject Live	₹600/- per subject Recorded

Class XI-XII
(Science, Commerce & Arts)

• **LIVE & Recorded Classes** • **English & Hindi Medium**

आज से ही बनाएँ अपनी पढ़ाई को और बेहतर
Utkarsh Online Tuition के साथ

उत्कर्ष एप ही क्यों ?

- विख्यात व अनुभवी विषय-विशेषज्ञों की टीम
- फैकल्टी द्वारा हस्तलिखित पैनल PDF & e-Notes
- नियमित टेस्ट द्वारा मूल्यांकन (MCQs & Self Assessment)
- टॉपिकवाइज़ क्विज़ एवं उनका वीडियो व्याख्यान
- Live Poll during interactive classes.
- 4K डिजिटल पैनल पर इंटरैक्टिव कक्षाएँ
- 360° Rapid Revision.

15 M+ SUBSCRIBERS
2 M+ SUBSCRIBERS
10 M+ DOWNLOADS
1 M+ FOLLOWERS

UTKARSH CLASSES

www.utkarsh.com support@utkarsh.com